



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В.
ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Лекции по курсу
Численные методы

Лектор
Н. И. Ионкин

Москва, 2015

Оглавление

Глава VI Приближённое вычисление определённых интегралов	5
§ 1 Примеры квадратурных формул	5
§ 2 Квадратурные формулы Ньютона–Котеса	12
§ 3 Метод Гаусса вычисления определённых интегралов . . .	16

Глава VI

Приближённое вычисление определённых интегралов

В этой главе изложено несколько способов приближённого вычисления определённых интегралов вида $\int_a^b f(x) dx$. Все они основаны на использовании квадратурных формул, то есть на замене исходного интеграла конечной суммой. При оценке погрешности квадратурных формул предполагается, что $f(x)$ обладает достаточной гладкостью.

§ 1 Примеры квадратурных формул

Пример 1 (формула прямоугольников). Введём на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку ω_h с шагом h , то есть множество точек

$$\omega_h = \left\{ x_i = a + ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad hN = b - a \right\} \quad (1)$$
$$f_i = f(x_i), \quad i = \overline{0, N}.$$

и представим исходный интеграл в виде суммы интегралов

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (2)$$

Для вычисления интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$ применим приближённую формулу (так называемую *формулу прямоугольников*):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx (x_i - x_{i-1})f_{i-\frac{1}{2}} = hf_{i-\frac{1}{2}}; \quad (3)$$

$$f_{i-\frac{1}{2}} = f(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{1}{2}h, \quad i = \overline{1, N}.$$

Геометрически такая замена означает, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ приближается площадью прямоугольника $AB'C'D$ (см. рис. 1).

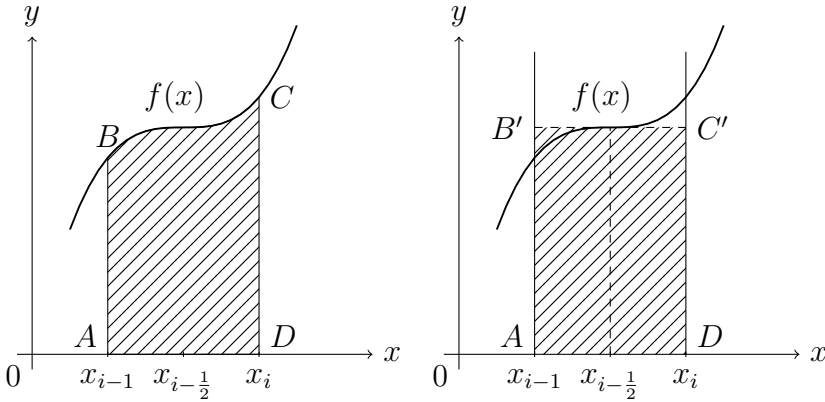


Рис. 1: Геометрический смысл формулы прямоугольников

Суммированием формулы (3) по i от 1 до N получим формулу прямоугольников для всего отрезка $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N hf_{i-\frac{1}{2}}, \quad hN = b - a. \quad (4)$$

Оценим погрешность формулы прямоугольников, то есть разность

$$\Psi_h(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^N hf_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f_{i-\frac{1}{2}}) dx.$$

Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что для любого x , $x \in (x_{i-1}, x_i)$, найдётся точка ξ_i , $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, для которой

$$f(x) = f_{i-\frac{1}{2}} + f'(x_{i-\frac{1}{2}}) \left(x - x_{i-\frac{1}{2}} \right) + \frac{f''(\xi_i)}{2} \left(x - x_{i-\frac{1}{2}} \right)^2,$$

и, тем самым,

$$\Psi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f_{i-\frac{1}{2}} \right) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f''(\xi_i)}{2} \left(x - x_{i-\frac{1}{2}} \right)^2 dx, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь Ψ_i — погрешность формулы прямоугольников на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, N}$.

Задача 1. Показать, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2} \left(x - x_{i-\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \frac{h^3}{24}.$$

Отсюда, обозначая $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$, получим оценку

$$|\Psi_i| \leq \frac{M_2}{24} h^3.$$

Следовательно, на каждом частичном отрезке длины h формула прямоугольников имеет погрешность порядка h^3 . На всём отрезке $[a, b]$ погрешность является величиной порядка h^2 , точнее, справедлива оценка

$$|\Psi_h(f)| \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2. \quad (5)$$

Пример 2 (формула трапеций). Снова будем исходить из представления (2), но для вычисления интеграла на частичном отрезке применим так называемую *формулу трапеций*:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} h. \quad (6)$$

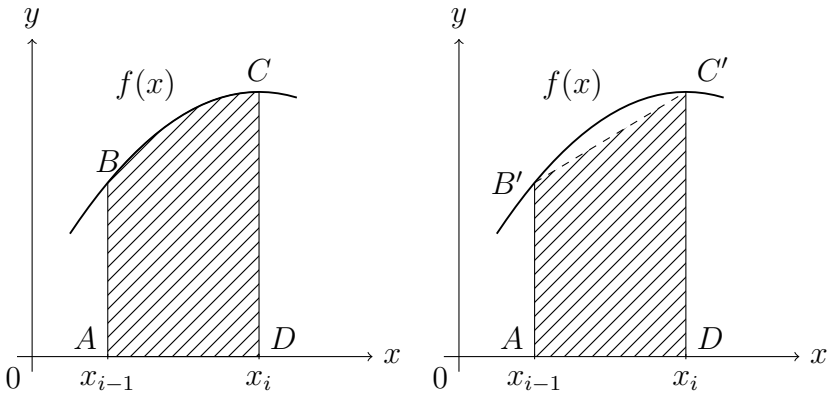


Рис. 2: Геометрический смысл формулы трапеций

Геометрический смысл формулы (6) ясен из рис. 2.

На всём отрезке $[a, b]$ получаем следующую формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{f_i + f_{i-1}}{2} h = h (0,5f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} + 0,5f_N); \quad (7)$$

$$hN = b - a.$$

Для оценки погрешности формулы трапеций

$$\Psi_h(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - \frac{f_i + f_{i-1}}{2} \right) dx$$

можно было бы снова применить формулу Тейлора, однако для нас будет проще воспользоваться результатами теории интерполирования, изложенной во **II главе**.

Проведём линейную интерполяцию функции $f(x)$ по точкам x_{i-1} и x_i , то есть представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = L_{1,i}(x) + \Psi_{L_{1,i}}(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (8)$$

где $L_{1,i}(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа первой степени:

$$L_{1,i}(x) = \frac{1}{h} \left((x - x_{i-1})f_i - (x - x_i)f_{i-1} \right)$$

и $\Psi_{L_{1,i}}(x)$ — погрешность интерполирования.

Интегрируя соотношения (8) получим равенство

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = 0,5(f_i + f_{i-1})h + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Psi_{L_{1,i}}(x) dx,$$

из которого следует, что погрешность формулы трапеций можно представить в виде суммы

$$\Psi_h(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Psi_{L_{1,i}}(x) dx.$$

Для погрешности интерполирования в § 2 главы II получено представление

$$\Psi_{L_{1,i}}(x) = \frac{f''(\xi_i)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Следовательно, погрешность формулы трапеций на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Psi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Psi_{L_{1,i}}(x) dx$$

можно оценить так:

$$|\Psi_i| \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x_i - x) dx = \frac{M_2}{12} h^3,$$

где $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Задача 2. Показать, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x_i - x) dx = \frac{h^3}{6}.$$

На всём отрезке $[a, b]$ получим следующую оценку:

$$|\Psi_h(f)| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2.$$

Таким образом, формула трапеций имеет, так же как и формула прямоугольников, второй порядок точности по h (то есть $\Psi_h(f) = O(h^2)$), но её погрешность оценивается величиной, в два раза большей.

Пример 3 (формула Симпсона). Для аппроксимации определённого интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$ заменим функцию $f(x)$ параболой, проходящей через точки x_{i-1} , $x_{i-\frac{1}{2}}$, x_i , то есть представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = L_{2,i}(x) + \Psi_{L_{2,i}}(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

где $L_{2,i}(x)$ — интерполяционный полином Лагранжа второй степени:

$$L_{2,i}(x) = \frac{2}{h^2} \times \left((x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_i)f_{i-1} - 2(x - x_{i-1})(x - x_i)f_{i-\frac{1}{2}} + (x - x_{i-1})(x - x_{i-\frac{1}{2}})f_i \right),$$

и $\Psi_{L_{2,i}}(x)$ — погрешность интерполирования.

Проводя интегрирование, получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x) dx = \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i).$$

Таким образом, приходим к квадратурной формуле

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i), \quad (9)$$

которая называется *формулой Симпсона* или *формулой парабол*. На

всём отрезке $[a, b]$ формула Симпсона имеет вид

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^N \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i) = \\ &= \frac{h}{6} \left(f_0 + f_N + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1}) + 4(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \cdots + f_{N-\frac{1}{2}}) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы не использовать дробных индексов, можно ввести следующие обозначения:

$$x_i = a + 0,5hi, \quad i = \overline{0, 2N}, \quad hN = b - a, \quad f_i = f(x_i).$$

Тогда формулу Симпсона можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \left(\frac{b-a}{2N} \right) \frac{1}{3} \times \\ &\times \left(f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{2N-1}) \right). \end{aligned}$$

В связи с исследованием погрешности квадратурной формулы Симпсона сделаем два замечания.

Замечание 1. Если оценивать погрешность квадратурной формулы Симпсона (9), делая замену подынтегральной функции вида $f(x) = L_{2,i}(x) + \Psi_{L_{2,i}}(x)$, где $L_{2,i}(x)$ — интерполяционный полином Лагранжа второй степени, а $\Psi_{L_{2,i}}$ — погрешность интерполяционной формулы Лагранжа, то можно получить загробленную оценку, пропорциональную h^4 на частичном отрезке.

Замечание 2. Точная оценка погрешности формулы Симпсона (9) получится, если подынтегральную функцию $f(x)$ заменить полиномом Эрмита $H_3(x)$, построенным в § 5 главы II. В § 6 этой главы проведён вывод этой погрешности, которая на частичном отрезке пропорциональна h^5 . На всём отрезке $[a, b]$ квадратурная формула Симпсона (10) имеет погрешность $O(h^4)$

§ 2 Квадратурные формулы Ньютона–Котеса

В этом и в следующем параграфах рассматриваются приближённые формулы вычисления определённых интегралов вида

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx, \quad (1)$$

где $\rho(x)$ — фиксированная интегрируемая функция (так называемая *весовая функция*), $\rho(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$, а $f(x)$ — достаточно гладкая функция.

В отличие от предыдущего параграфа, мы не будем разбивать отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки, а получим квадратурные формулы путём замены функции $f(x)$ алгебраическими полиномами степени n сразу на всём отрезке $[a, b]$. Такие квадратурные формулы называют *квадратурными формулами интерполяционного типа*. Ясно, что их точность возрастает с ростом числа узлов интерполяции.

Получим выражения для коэффициентов этих квадратурных формул. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы узлы интерполирования $x_k, k = 0, n$. Предполагается, что среди них нет совпадающих, в остальном эти узлы могут быть расположены на $[a, b]$ произвольным образом.

Заменим в интеграле (1) функцию $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} f(x_k),$$

где

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad \omega'(x_k) = \prod_{\substack{j=0, n, \\ j \neq k}} (x_k - x_j).$$

В результате получим приближённую формулу

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n c_k f(x_k), \quad (2)$$

где коэффициенты c_k вычисляются по правилу

$$c_k = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx. \quad (3)$$

Полагая, например, $\rho(x) = 1$, $n = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, получим, что $c_0 = b - a$, и придём к формуле прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(x_0),$$

которая рассмотрена в примере 1 из § 1 для случая $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

В случае равноотстоящих узлов интерполирования квадратурные формулы интерполяционного типа называются *формулами Ньютона–Котеса*. Приведём их общепринятую запись.

Пусть $x_k = a + kh$, $k = 0, n$, $nh = b - a$. Сделаем замену

$$x = a + th, \quad 0 \leq t \leq n,$$

и запишем $\omega(x)$ как функцию t :

$$\chi(t) = \omega(a + th) = t(t-1)(t-2) \cdots (t-n)h^{n+1}.$$

При этом получим, что

$$\begin{aligned} \chi'(k) &= \omega'(a + kh) = (-1)^{n-k} k!(n-k)!h^n, \\ c_k &= (b-a)b_k^{(n)}, \\ b_k^{(n)} &= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n} \int_0^n \rho(a + th) \frac{t(t-1) \cdots (t-n)}{(t-k)} dt \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, придём к общепринятой записи формул Ньютона–Котеса

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} f_k, \quad (5)$$

где $f_k = f(x_k)$, а $b_k^{(n)}$ вычисляются в соответствии с (4).

В случае $\rho(x) = 1$, $n = 1$ из (4) и (5) получим формулу трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)),$$

а в случае $\rho(x) = 1$, $n = 2$ — формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Полагая $\rho(x) = 1$, $n = 3$, получим из (4) и (5) ещё одну квадратурную формулу (так называемую *формулу «трёх восьмых»*)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b) \right), \quad h = \frac{b-a}{3}. \quad (6)$$

По построению, эта формула точна для всех многочленов третьей степени. Более того, можно показать, что при малых h её погрешность является величиной $O(h^5)$.

Отметим, что квадратурные формулы Ньютона–Котеса с большим n ($n \geq 10$) на практике используется редко.

Нетрудно получить выражения для погрешности квадратурной формулы интерполяционного типа. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = L_n(x) + \psi_{L_n}(x),$$

где $L_n(x)$ — интерполяционный многочлен для $f(x)$, построенный по узлам $x_0, x_1, \dots, x_n$. Тогда

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) L_n(x) dx + \int_a^b \rho(x) \psi_{L_n}(x) dx$$

и, согласно соотношениям (2) и (3),

$$\int_a^b \rho(x) L_n(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k).$$

Таким образом, для погрешности

$$\Psi(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k f(x_k)$$

получим

$$\Psi(f) = \int_a^b \rho(x) \psi_{L_n}(x) dx.$$

Используя выражение для погрешности интерполирования (см. § 2 главы II)

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x), \quad \xi \in (a, b), \\ \omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \end{aligned}$$

придём к следующей формуле:

$$\Psi(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \rho(x) f^{(n+1)}(\xi) \omega(x) dx. \quad (7)$$

Заметим, что оценка погрешности, полученная из (7),

$$|\Psi(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b \rho(x) |\omega(x)| dx, \quad M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

не является точной. В действительности, формула Симпсона точна для любого многочлена третьей степени, однако из приведённой оценки это не следует. Более аккуратные оценки погрешности можно найти, например, в [2].

Из представления погрешности в виде (7) следует, что квадратурная формула интерполяционного типа, построенная по n узлам интерполяции, точна для любого многочлена степени $n - 1$.

§ 3 Метод Гаусса вычисления определённых интегралов

В предыдущем параграфе предполагалось, что узлы квадратурных формул заданы заранее. Было показано, что если использовать n узлов интерполяции, то можно получить квадратурные формулы, которые точны для алгебраических многочленов степени $n - 1$. Можно ли за счёт выбора расположения узлов интерполяции получить квадратурные формулы, которые были бы точны для многочленов степени выше $n - 1$? Оказывается, что можно.

Рассмотрим следующую задачу: построить квадратурную формулу

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \quad (1)$$

которая при заданном n была бы точна для алгебраического многочлена возможно большей степени.

В этом параграфе будет показано, что такие квадратурные формулы существуют. Они называются *квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности*, или *формулами Гаусса*. Эти формулы точны для любого алгебраического многочлена степени $2n - 1$.

Итак, потребуем, чтобы квадратурная формула (1) была точна для любого алгебраического многочлена степени m . Это эквивалентно тому, что формула точна для следующих функций $f(x)$:

$$1, x, x^2, \dots, x^m.$$

Отсюда получим условия

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k^\alpha = \int_a^b \rho(x) x^\alpha dx, \quad \alpha = \overline{0, m}, \quad (2)$$

которые представляют собой систему из $m + 1$ уравнения относительно $2n$ неизвестных

$$c_1, c_2, \dots, c_n; \quad x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Таким образом, максимальная степень алгебраической точности, на которую можно надеяться, определяется условием $m + 1 = 2n$, то есть $m = 2n - 1$.

В дальнейшем будет показано, что система (2) при $m = 2n - 1$ имеет решение, и притом единственное. Однако сначала рассмотрим несколько частных случаев, когда решение системы (2) можно найти непосредственно.

Пусть $\rho(x) = 1$ и на отрезке $[a, b]$ выбран всего один узел интерполирования, то есть $n = 1$. Тогда $m = 1$ и система (2) примет вид:

$$\begin{cases} c_1 = \int_a^b dx = b - a, \\ x_1 c_1 = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \\ x_1 = \frac{a + b}{2}, \end{cases}$$

то есть получим известную формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right),$$

которая точна для любого многочлена первой степени.

Рассмотрим ещё один случай, когда $\rho(x) = 1, n = 2, m = 3$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a = -1, b = 1$. Тогда система (2) запишется в виде

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \int_{-1}^1 dx = 2, \\ x_1 c_1 + x_2 c_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0, \\ x_1^2 c_1 + x_2^2 c_2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ x_1^3 c_1 + x_2^3 c_2 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдём

$$c_1 = c_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

то есть получим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

которая точна для любого алгебраического многочлена третьей степени.

Возвращаясь к рассмотрению квадратурных формул (1) общего вида, введём многочлен

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \quad (3)$$

Теорема 1. *Квадратурная формула (1) точна для любого многочлена степени $2n - 1$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1. *многочлен $\omega(x)$ ортогонален с весом $\rho(x)$ любому многочлену $q(x)$ степени меньше n , то есть*

$$\int_a^b \rho(x) \omega(x) q(x) dx = 0, \quad (4)$$

2. *коэффициенты c_k вычисляются по правилу*

$$c_k = \int_a^b \frac{\rho(x) \omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Доказательство. Необходимость. Так как $\omega(x)q(x)$ — многочлен степени, меньшей $2n$, то формула (1) точна для этого многочлена, то есть

$$\int_a^b \rho(x) \omega(x) q(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \omega(x_k) q(x_k).$$

Но $\omega(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ и мы приходим к (4). Далее рассмотрим многочлены

$$\omega_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}, \quad i = \overline{1, n},$$

имеющие степень $n - 1$. Для них формула (1) точна и, тем самым,

$$\int_a^b \rho(x)\omega_i(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \omega_i(x_k).$$

Учитывая, что $\omega_i(x_k) = 0$, $i \neq k$, $\omega_i(x_i) = 1$, получим

$$c_i = \int_a^b \rho(x)\omega_i(x) dx, \quad i = \overline{1, n},$$

что и доказывает формулу (5).

Достаточность. Пусть выполнены условия 1 и 2 теоремы 1 и пусть $f(x)$ — любой многочлен степени $2n - 1$. Известно, что $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \omega(x)q(x) + r(x),$$

где $\omega(x)$ — многочлен степени n , определённый согласно (3), а $q(x)$, $r(x)$ — некоторые многочлены, имеющие степень не выше, чем $n - 1$. Интегрируя, получим, в силу (4),

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx = \int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x) dx + \int_a^b \rho(x)r(x) dx = \int_a^b \rho(x)r(x) dx.$$

Поскольку $r(x)$ — многочлен степени, не выше $n - 1$, то интерполяционная квадратурная формула, построенная для $r(x)$ по n узлам, точна, то есть

$$\int_a^b \rho(x)r(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k r(x_k).$$

Учитывая, что $r(x_k) = f(x_k) - \omega(x_k)q(x_k) = f(x_k)$, получим

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx = \int_a^b \rho(x)r(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k),$$

то есть формула (1) точна для любого многочлена $f(x)$ степени $2n - 1$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что использование этой теоремы существенно упрощает построение квадратурных формул Гаусса. Теперь, вместо того, чтобы непосредственно решать нелинейную систему (2), достаточно, пользуясь соотношениями ортогональности (4), найти узлы $x_1, x_2, \dots, x_n$ и затем по формулам (5) вычислить коэффициенты c_k . Условие (4) эквивалентно системе n уравнений

$$\int_a^b \rho(x)\omega(x)x^\alpha dx = 0, \quad \alpha = \overline{0, n-1} \quad (6)$$

относительно n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Теорема 1 не гарантирует, однако, существования решения системы (6). Чтобы доказать существование решения этой системы (или, что то же самое — существование многочлена $\omega(x)$ степени n , ортогонального всем многочленам степени, меньшей n), запишем $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (7)$$

с неопределёнными коэффициентами и рассмотрим (6) как систему линейных уравнений относительно a_i , $i = \overline{0, n-1}$.

Покажем, что соответствующая однородная система уравнений

$$\int_a^b \rho(x) (a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0) x^\alpha dx = 0, \quad \alpha = \overline{0, n-1}, \quad (8)$$

имеет единственное решение $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Умножим уравнение системы (8), имеющее номер α , на a_α и сложим все полученные уравнения. Тогда придём к следующему соотношению:

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \left[a_\alpha \int_a^b \rho(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right) x^\alpha dx \right] = 0.$$

Отсюда получим

$$\int_a^b \rho(x) \left(\sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{\alpha} x^{\alpha} a_k x^k \right) dx = 0,$$

но

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{\alpha} x^{\alpha} a_k x^k = \left(\sum_{\alpha=0}^{n-1} a_{\alpha} x^{\alpha} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right)^2,$$

то есть

$$\int_a^b \rho(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right)^2 dx = 0.$$

Но тогда, учитывая положительность $\rho(x)$, получим, что многочлен степени $2(n-1)$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right)^2,$$

тождественно равен нулю. Следовательно, $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$, то есть однородная система уравнений (8) имеет только нулевое решение, а соответствующая неоднородная система (6) имеет единственное решение.

Тем самым, доказано существование многочлена вида (7), ортогонального всем многочленам степени, меньшей n . Остаётся показать, что все корни многочлена (7) различны и расположены на отрезке $[a, b]$, то есть, что многочлен (7) можно представить в виде (3).

Предположим, что многочлен (7) имеет m , $m \leq n$, корней нечётной кратности, расположенных на $[a, b]$. Это всегда можно предположить, полагая, например, $m = 0$. Если теперь докажем, что $m = n$, то это и будет означать, что все корни $\omega(x)$ простые и лежат на отрезке $[a, b]$.

Допустим обратное, то есть что $m \neq n$. Тогда $m < n$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ — корни многочлена $\omega(x)$ нечётной кратности, расположенные на $[a, b]$. Тогда $\omega(x)$ можно представить в виде

$$\omega(x) = (x - \xi_1)^{\alpha_1} (x - \xi_2)^{\alpha_2} \dots (x - \xi_m)^{\alpha_m} \beta(x),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — нечётные числа и $\beta(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$. Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \rho(x) \omega(x) (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_m) dx = \\ &= \int_a^b \rho(x) \beta(x) (x - \xi_1)^{\alpha_1+1} (x - \xi_2)^{\alpha_2+1} \cdots (x - \xi_m)^{\alpha_m+1} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha_k + 1$ — чётные числа, $k = \overline{1, m}$, то подынтегральная функция не меняет знака на $[a, b]$ и обращается в нуль в конечном числе точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Следовательно, $I \neq 0$.

С другой стороны, многочлен $(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_m)$ имеет степень $m < n$, и согласно теореме 1 имеем $I = 0$. Пришли к противоречию, которое и доказывает, что $m = n$.

Замечание 1. Нетрудно показать, что $2n - 1$ — наивысшая точность формул Гаусса, то есть что существует многочлен степени $2n$, для которого формула Гаусса не является точной. В качестве такого многочлена можно взять $\omega^2(x)$. Так как $\omega(x)$ обращается в нуль в конечном числе точек, интеграл $\int_a^b \rho(x) \omega^2(x) dx$ положителен. Однако по формуле Гаусса

$$\sum_{k=0}^n c_k \omega^2(x_k) = 0,$$

то есть в данном случае эта формула не является точной.

Замечание 2. Коэффициенты c_k формул Гаусса положительны. Рассмотрим многочлены

$$\varphi_i(x) = \left(\frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} \right)^2, \quad i = \overline{1, n},$$

имеющие степень $2n - 2$. Для этих многочленов формулы Гаусса точные и поэтому

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_i(x_k).$$

Но

$$\varphi_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

и следовательно,

$$c_i = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b \rho(x) \left(\frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} \right)^2 dx > 0.$$

Замечание 3. Для погрешности формул Гаусса справедливо представление

$$\Psi_n(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) f^{(2n)}(\xi) dx.$$

Не приводя доказательства, отметим лишь, что оно основано на использовании интерполяционного полинома Эрмита $H(x)$ с двукратными узлами

$$H(x_k) = f(x_k), \quad H'(x_k) = f'(x_k), \quad k = \overline{1, n}.$$